XI. MAGYAR MECHANIKAI KONFERENCIA
MaMeK, 2011
Miskolc, 2011. augusztus 29-31.

EGY KÖR RÉSZLEGES FEDÉSE 6 KONGRUENS KÖRREL

Gáspár Zsolt

BME, Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3. K Épület, földszint 35.
gaspar@ep-mech.me.bme.hu

Absztrakt: *Az előadás azt mutatja be, hogy egy geometriai probléma (az egységkör minél nagyobb részének lefedése 6 kongruens körrel) megoldható egy általánosított tensegrity szerkezet sajátfeszültségi helyzeteinek megkeresésével is. A sugár függvényében mutatott elrendezések az egyensúlyi utaknak felelnek meg. Megmutatjuk, hogy a lokálisan optimális elrendezések különböző típusú szimmetriát mutathatnak, az egyensúlyi utak elágazhatnak, sőt bizonyos szakaszai háromdimenziós tartományokká fajulnak el.*

Kulcsszavak: *Körelrendezések, tensegrity, optimálás, egyensúlyi utak*

1. BEVEZETÉS

A diszkrét geometria egy komolyan kutatott területpárja a következő:

- mi a legnagyobb sugara ($r_{\max}$) annak az adott számú (n) kongruens körnek, amelyet még el lehet helyezni átfedés nélkül egy egységkör belsejében (és hogyan kell elrendezni e köröket),
- mi a legkisebb sugara ($R_{\min}$) annak az adott számú kongruens körnek, amellyel teljesen le lehet fedni egy egységkört (és hogyan kell elrendezni e köröket)?

Zahn [1] már 1962-ben felvetette az átmeneti problémát: hogyan lehet az egységkör területének legnagyobb részét lefedni, ha a kongruens körök sugara e két érték között van? Csikós [2] közölt egy formulát, amelyhez Connelly [3] rendelt egy egyensúlyi helyzetben lévő tensegrity szerkezetet. Ez azonban csak akkor érvényes, ha e körök legfeljebb kétszeresen fedik az egységkör bármely részterületét. Ezt a tensegrity szerkezetet általánosítottuk [4] arra az esetre is, amikor háromszoros lefedés is előfordul, majd n=5 esetben meghatároztuk [5] az egyensúlyi utakat.

Az általánosított tensegrity szerkezet ([4]) háromféle elemet tartalmaz:

- a csak húzásnak ellenálló kötélelemet, amelyik az egységkör középpontját és az egyik kongruens kör középpontját köti össze,
- a csak nyomásnak ellenálló dúcelemet, amelyik két kongruens kör középpontját köti össze, végül
- háromszögelemet, amelynek a csúcsai három kongruens kör középpontjára illeszkednek.

Az elemek által feleslegesen lefedett területeket potenciális energiának tekintve, azt az elem hossza (a háromszögnél oldalhossza) szerint deriválva megkapjuk az elemek fizikai egyenletét, amelyik erősen nemlineáris, vannak szinguláris pontjai is, melynél a függvény nem deriválható, sőt az egyik oldalról közelítve a pontot a derivált nem korlátos. A fizikai egyenlet deriváltjai határozzák meg az elem merevségét, azokból előállíthatók az elemek merevségi mátrixai, majd ezekből a teljes szerkezet merevségi mátrixa. Az adott sugárhoz tartozó optimális elrendezésekhez tartozó merevségi mátrix pozitív definit.

Az L hosszúságú *kötélelem* S rúderejének

$$S = \begin{cases} 0 & \text{ha } L \le 1-r \\ \sqrt{4L^2 - \left(1+L^2-r^2\right)^2} \,/\, L & \text{ha } L > 1-r \end{cases} \tag{1}$$

és a H merevségének

$$H = \frac{dS}{dL_s} = \begin{cases} 0 & \text{ha } S = 0 \\ \dfrac{1}{L_s}\left(\dfrac{2\left(1-L_s^2+r^2\right)}{S} - S\right) & \text{ha } S > 0 \end{cases} \tag{2}$$

képlete, ahol L_S az S rúderőhöz tartozó kötélhossz:

$$L_s = \begin{cases} L_r & \text{ha } S = 0 \\ \sqrt{1+r^2-S^2/2-\sqrt{4r^2-S^2-r^2S^2+S^4/4}} & \text{ha } S > 0 \end{cases}, \tag{3}$$

itt L_r a kötél által összekötött csomópontok távolsága. A kötélelem merevségi mátrixa:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & -\mathbf{K}_0 \\ -\mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K}_0 = \mathbf{e}\mathbf{e}^T\left(H - \frac{S}{L_r}\right) + \mathbf{E}\frac{S}{L_r}, \tag{4}$$

ahol **e** az elem kezdőpontjából a végpontja felé mutató egységvektor, **E** pedig másodrendű egységmátrix.

Az L hosszúságú *dúcelem*ben ébredő erő nagysága

$$S=\begin{cases}-\sqrt{4r^2-L^2} & \text{ha } L<2r\\ 0 & \text{ha } L\geq 2r\end{cases}, \tag{5}$$

az elem merevsége:

$$H=\frac{dS}{dL_s}=\begin{cases}\sqrt{4\left(r/S\right)^2-1} & \text{ha } S<0\\ 0 & \text{ha } S=0\end{cases}. \tag{6}$$

A merevségi mátrix most is a (4) képlet szerint állítható elő.

A *háromszögelem* oldalhosszait L_i (i=1, 2, 3) jelöli. Ha van olyan oldalhossz, amelyik 2r–nél hosszabb, akkor biztos, hogy a háromszögelem passzív (minden élerő zérus). Ha minden oldalhossz kisebb 2r-nél, akkor az élerők számításához az indexekben az $1\rightarrow 2\rightarrow 3\rightarrow 1$ ciklikus sorrendet használjuk. A háromszögelem szögei:

$$\beta_i=\arccos\frac{L_{i-1}^2+L_{i+1}^2-L_i^2}{2L_{i-1}L_{i+1}}. \tag{7}$$

A háromszög köré írható kör sugara (bármelyik i-re):

$$R=\frac{L_i}{2\sin\beta_i}. \tag{8}$$

Bevezetjük a következő segédmennyiségeket:

$$a_i=\frac{L_i^2-L_{i-1}^2-L_{i+1}^2}{4L_{i-1}},\qquad c_i=\sqrt{r^2-L_i^2/4}, \tag{9a}$$

$$b_i=c_i\sin\beta_{i+1},\qquad d_i=\sqrt{R^2-L_i^2/4}. \tag{9b}$$

Az élerők:

$$Q_i=\begin{cases}2c_i & \text{ha } 0<a_i-b_i\\ c_i+d_i & \text{ha } a_i-b_i<0<a_i\\ c_i-d_i & \text{ha } a_i<0<a_i+b_i\\ 0 & \text{ha } a_i+b_i<0\end{cases}. \tag{10}$$

Ebből látszik, hogy ha mindhárom (i=1, 2, 3) élnél teljesül az $a_i+b_i<0$ egyenlőtlenség, akkor a háromszögelem passzív. Megjegyezzük, előfordulhat az, hogy egyetlen élerő különbözik zérustól. (Két kis kör közös részét a harmadik tartalmazza, vagyis e három kör közös része két egybevágó körszelet uniója.) Ekkor ez az élerő éppen az élhez tartozó dúcelemben keletkező dúcerő ellentettje. Ilyen esetben a teljes szerkezet erőjátéka, merevségi mátrixa változatlan marad, ha a háromszögelemet és vele együtt az előbb említett élhez tartozó dúcelemet is passzívnak vesszük.

Aktív háromszögelem élerőinek növekménye és az élhosszai növekménye között a harmadrendű **H** mátrix tart kapcsolatot:

$$\begin{bmatrix}dQ_1\\ dQ_2\\ dQ_3\end{bmatrix}=\mathbf{H}\begin{bmatrix}dL_1\\ dL_2\\ dL_3\end{bmatrix}. \tag{11}$$

A **H** mátrix elemei:

$$H_{ij}=\frac{\partial Q_i}{\partial L_j}=\begin{cases}2\dfrac{\partial c_i}{\partial L_j} & \text{ha } 0<a_i-b_i\\ \dfrac{\partial c_i}{\partial L_j}+\dfrac{\partial d_i}{\partial L_j} & \text{ha } a_i-b_i<0<a_i\\ \dfrac{\partial c_i}{\partial L_j}-\dfrac{\partial d_i}{\partial L_j} & \text{ha } a_i<0<a_i+b_i\\ 0 & \text{ha } a_i+b_i<0\end{cases}, \tag{12}$$

ahol (δ_{ij} a Kronecker-szimbólum)

$$\frac{\partial c_i}{\partial L_j}=\frac{-\delta_{ij}L_i}{4\sqrt{r^2-L_i^2/4}},\qquad \frac{\partial d_i}{\partial L_j}=\frac{R\dfrac{\partial R}{\partial L_j}-\delta_{ij}\dfrac{L_i}{4}}{\sqrt{R^2-L_i^2/4}},. \tag{13}$$

$$\frac{\partial R}{\partial L_j}=\frac{L_{j-1}L_{j+1}\left(L_j^4-\left(L_{j-1}^2-L_{j+1}^2\right)^2\right)}{\left(2L_2^2L_3^2+2L_3^2L_1^2+2L_1^2L_2^2-L_1^4-L_2^4-L_3^4\right)^{3/2}}$$

A háromszögelem elsődleges merevségi mátrixának $(\mathbf{K}')$ egy blokkja

$$\mathbf{K}'_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}(-1)^{\alpha+\beta}\mathbf{e}_{i+\alpha}H_{i+\alpha,j+\beta}\mathbf{e}^T_{j+\beta}, \tag{14}$$

ahol $\mathbf{e}_i$ ez i-edik él egységvektora.

A másodlagos merevségi mátrix felépítése:

$$\mathbf{K}'' = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^0_2+\mathbf{K}^0_3 & -\mathbf{K}^0_3 & -\mathbf{K}^0_2 \\ -\mathbf{K}^0_3 & \mathbf{K}^0_1+\mathbf{K}^0_3 & -\mathbf{K}^0_1 \\ -\mathbf{K}^0_2 & -\mathbf{K}^0_1 & \mathbf{K}^0_1+\mathbf{K}^0_2 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

ahol

$$\mathbf{K}^0_i = \frac{Q_i}{L_i}\left(\mathbf{E}-\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T\right). \tag{16}$$

A háromszögelem teljes (érintő) merevségi mátrixa a két merevségi mátrix összege:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}'+\mathbf{K}''. \tag{17}$$

Ebben az előadásban n=6 esetére mutatjuk be az „egyensúlyi utakat”, vagyis a kongruens körök adott sugarához az általánosított tensegrity szerkezetek egyensúlyi helyzeteit. Az elrendezéseknél a koordináta-rendszer origóját az egységkör középpontjában vesszük fel. A legalsó kongruens kör x koordinátáját zérusnak választjuk, így az elrendezések merevtest-szerű elmozdulását megszüntetjük.

2. A 6 KÖR OPTIMÁLIS ELHELYEZÉSEI

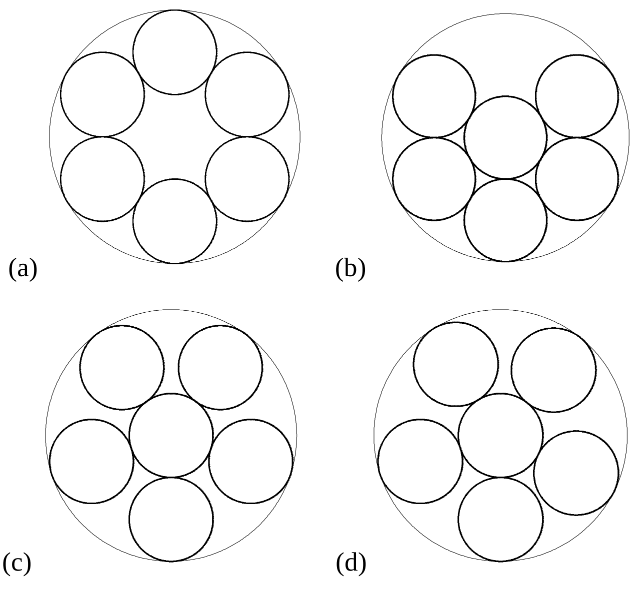
A szakirodalomból ismert, hogy átfedés nélkül legfeljebb $r_{\max}$=1/3 sugarú körökből lehet 6-ot elhelyezni az egységsugarú körben. Igaz, ekkora körökből 7 is elhelyezhető: egy az egységkör közepébe és 6 egyenletesen elosztva köréje. A 6 kör elhelyezésekor ezekből egy elhagyandó. Így két lényegében eltérő elhelyezés lehetséges (lásd az 1. ábrát). Ha a középső kört hagyjuk el (1(a) ábra), akkor az elrendezésnek D_6 szimmetriája van. Ha valamelyik külső kört hagyjuk el (1(b-d) ábra), akkor az elrendezésnek lehet D_1 vagy D_5 szimmetriája, de tipikusan aszimmetrikus (C_1). A külső körök elhelyezkedését egy négydimenziós halmazzal lehet megadni. A megadáshoz jelöljük a D_5 szimmetriájú elrendezésnél a külső körök közötti réseknek az egységkör középpontjából látható szögét α-val. Most $\alpha = \pi/15$. A legalsó körtől indulva jelöljük φ_i-vel (i=0,1,…,5) azt a szöget, amelyikkel az i-edik kört az origó körül elfordítjuk a D_5 szimmetriájú helyzetből. A legalsó kört elfordulás ellen megtámasztottuk, ezért $\varphi_0=\varphi_5=0$. Tehát egy kimozdított helyzetet a φ_i (i=1,…,4) koordinátákkal definiálhatunk. A külső körök nem metszhetik egymást, vagyis a

$$\varphi_i-\varphi_{i+1}\le\alpha,\quad i=0,1,...,4 \tag{18}$$

egyenlőtlenségekkel az $\mathbb{R}^4$ teret egy szimplexre szűkítjük, melynek csúcspontjai:

$$(4\alpha,3\alpha,2\alpha,\alpha),\ (-\alpha,3\alpha,2\alpha,\alpha),\ (-\alpha,-2\alpha,2\alpha,\alpha),\ (-\alpha,-2\alpha,-3\alpha,\alpha),\ (-\alpha,-2\alpha,-3\alpha,-4\alpha). \tag{19}$$

Ezekben a pontokban az elrendezésnek az 1(b) ábrán is látható D_1 szimmetriája van.



1. ábra. 6 kör optimális elhelyezései az egységkörben ($r_{\max}$=1/3) különböző szimmetriában: (a) D_6, (b) D_1, (c) D_5, (d) C_1

A kitüntetett vagy éppen vizsgált körelrendezések adatait (a sugarat, a körök középpontjainak helyét, a lefedettséget) a cikk összefoglalójában táblázatosan közöljük.

3. FEDÉSEK

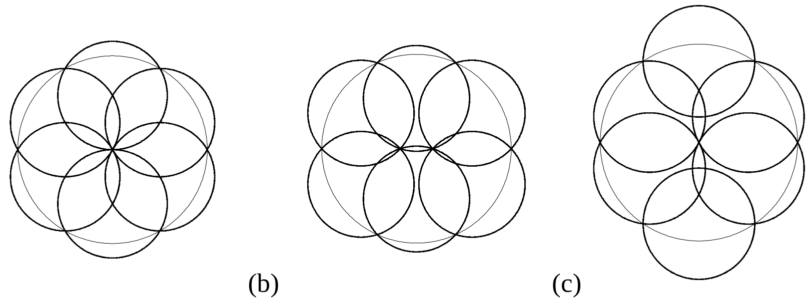
Könnyen megállapítható, hogy D_6 szimmetriában R_{D6}=1/$\sqrt{3}$ sugarú körökkel lefedhető az egységkör (2(a) ábra). A fedés optimális voltának ellenőrzésére meg kell állapítani, hogy a [4]-ben leírt kötélszerkezet ebben a helyzetben sajátfeszültségi állapotban lehet-e, valamint azt is, hogy a második típusú csomópontjaihoz nem kapcsolódik-e háromnál több kötél. Most az egységkör középpontjára illeszkedő második típusú csomópontba 6 kötél is befut, ezért az ott leírtak szerint a csomópont és néhány kötél megtöbbszörözendő, és a szerkezet egyenletes hűtéssel jobb helyzetbe kerülhet.

Ha úgy többszörözzük meg e csomópontot, hogy

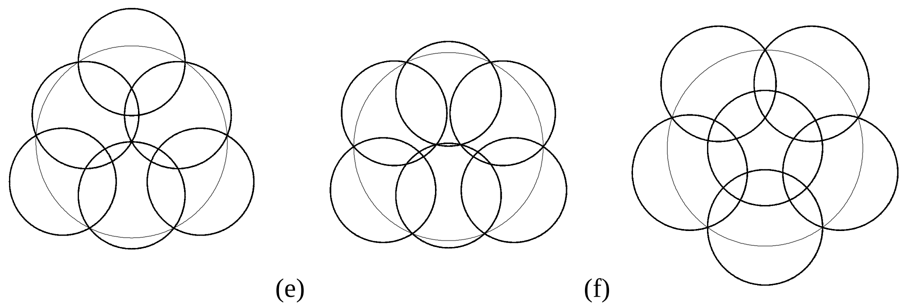
- két részre váljék, és mindkettőhöz K alakban 4-4 kötél csatlakozzék, akkor az R_{D2d}=0,5600968657 sugárnál lehet sajátfeszültségi állapot egy D_2 szimmetriájú elrendezésnél (2(b) ábra), melyet dinnyealaknak fogunk hívni;
- három részre váljék, ahol az egyikhez X alakban 4, a többihez nyílhegy alakban 3-3 kötél csatlakozzék, akkor az R_{D2r}=0,5651977174 sugárnál lehet sajátfeszültségi állapot szintén egy D_2 szimmetriájú elrendezésnél (2(c) ábra), melyet rögbilabda- vagy röviden rögbialaknak fogunk hívni;
- négy részre váljék, ahol az egyikhez Y alakban, a többihez nyílhegy alakban csatlakozzék 3-3 kötél, akkor a hűtéses eljárással R_{D3}=0,5570157181 sugárnál D_3 szimmetriájú fedést kapunk (2(d) ábra).

A dinnyealakhoz tartozó elrendezésnél még van két olyan pont, ahol háromnál több kör metszi egymást, tehát az elrendezés tovább javítható. E pontok megkettőzése után $R_{\min}$=0,5559052114 sugárnál jutunk a D_1 szimmetriájú optimális fedéshez (2(e) ábra). E fedés optimális voltát Bezdek [6] igazolta.

A rögbialakhoz tartozó elrendezésnél még van egy olyan pont, ahol háromnál több kör metszi egymást. Ezt a csomópontot megkettőzve C_2 szimmetriát kapunk, de a szerkezetet hűtve először 2 új kötélelem jön létre, és így két második típusú csomópontba is négy kötél fut be, a 2(b) ábrán látható alakhoz tartozó szerkezettel topológiailag megegyező szerkezetet kapunk, amiből végül újabb csomópontkettőzésekkel szintén az optimális fedéshez jutunk.



(a) (b) (c)



(d) (e) (f)

2. ábra. Az egységkör fedései: (a) D_6 szimmetria R_{D6}=0,5773502692, (b) D_2 szimmetria (dinnye) R_{D2d}=0,5600968657, (c) D_2 szimmetria (rögbi) R_{D2r}=0,5651977174, (d) D_3 szimmetria R_{D3}=0,5570157181, (e) D_1 szimmetria $R_{\min}$=0,5559052114, (f) D_5 szimmetria R_{D5}=0,5877852523

Megjegyezzük, hogy D_3 szimmetriájú fedés teljesíti a lokális optimum feltételeit, így ebből az eddigi gondolatmenet alapján nem kapjuk meg az optimális fedést.

Végül belátható, hogy $R_{D5}=\sin(\pi/5)$ sugár esetén D_5 szimmetriájú fedés (2(f) ábra) is lehetséges. Itt azonban a középső kör helyzete nincs rögzítve, hanem tetszőleges olyan helyzetbe eltolható, melyben fedi a másik öt kör által lefedetlen középső tartományt. A középpontok megengedett tartományát 5 darab r sugarú körív határolja, amelyek középpontja 2-2 külső kör közös részének az origóhoz legközelebb fekvő pontja. Ha a középső kört kimozdítjuk az origóból, akkor megszűnik a D_5 szimmetria. Általános esetben minden szimmetria megszűnik, de ha a 2(f) ábrán látható elrendezés valamelyik szimmetriatengelyére illesztjük a középső kör középpontját, akkor D_1 szimmetriájú marad az elrendezés.

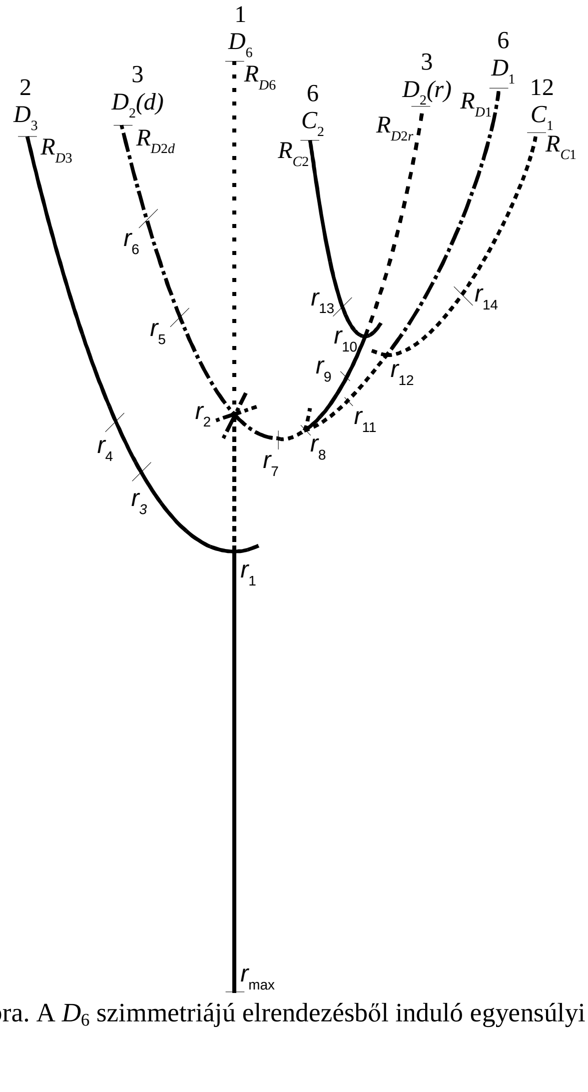
4. AZ EGYENSÚLYI UTAK

Egy egyensúlyi helyzetből kiindulva és a kongruens körök sugarát kis mértékben megváltoztatva az érintő merevségi mátrix felhasználásával egy iterációs eljárással az egyensúlyi út újabb pontját határozhatjuk meg. (Az egységkör és a 6 kongruens kör helyzetét összesen 14 koordináta határozza meg. Ebből 3 koordinátát a merevtest-szerű elmozdulás elkerülésére előírtunk, így a merevségi mátrix rendje 11.) Ha egy állapotban a merevségi mátrix mindegyik sajátértéke pozitív, akkor az elrendezés lokálisan optimális. Ha egy lépés során a negatív sajátértékek száma változik, akkor az egyensúlyi út közben elágazott. Az elágazás helyét a lépésnagyság célszerű változtatásával, iterációs úton tetszőlegesen pontosíthatjuk. Törekszünk arra is, hogy az egyensúlyi utak azon pontjait is megkeressük, amelyeknél az aktív elemek száma/típusa megváltozik. (Ezekben a pontokban az anyagegyenletek nem sima volta miatt a sajátértékek ugrásszerűen változhatnak.)

Az 1. ábrán megmutattuk, hogy két lényegesen különböző optimális elhelyezés létezik, melyek az elhelyezés szabályait megtartva, a körök helyzetét folyamatosan változtatva nem vihetők egymásba. Először ezekből a helyzetekből indulunk ki, és követjük az ebből kiinduló egyensúlyi utakat. Majd amikor megállapítjuk, hogy így nem jutunk el az optimális fedéshez, meghatározzuk e fedésből kiinduló egyensúlyi utat is.

4.1. A D_6 szimmetriájú elhelyezésből kiinduló egyensúlyi út

A D_6 szimmetriájú elrendezésből induló egyensúlyi utak egymáshoz való viszonyát a 3. ábrán szemléltetjük. Minden ág felett megadjuk, hogy az olyan típusú ágból hány van, és mi a elrendezések szimmetriája. A vonalak típusával szemléltetjük, hogy az elrendezéshez tartozó szerkezet merevségi mátrixának hány negatív sajátértéke van (0 – folytonos, 1 – szaggatott, 2 – eredmény-, 3 – pontokból álló vonal). A jobb áttekinthetőség kedvéért az elágazásoknál minden típusból csak egyet rajzoltunk ki, a többinek csak az indulását jeleztük. Az ábrán megadtuk a kitüntetett egyensúlyi helyzetekhez tartozó sugarak jelét is.



3. ábra. A D_6 szimmetriájú elrendezésből induló egyensúlyi utak

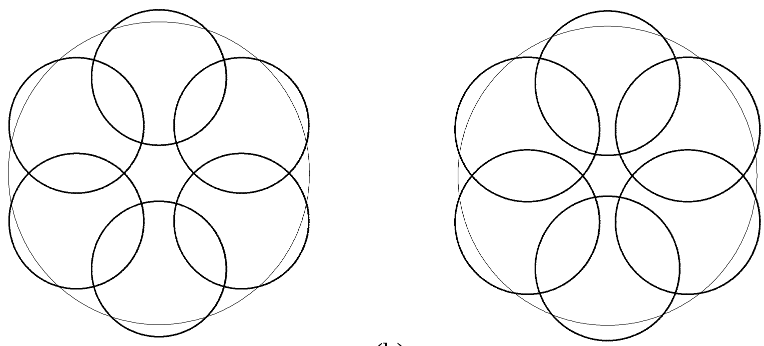
4.1.1. *A D_6 ág elemzése*

Ha az 1(a) ábrán látható alakból indulunk ki, majd kis lépésekben növeljük a sugarat, akkor az (r_{max}, r_1=0,4472135955) intervallumban 6-6 aktív kötél- és dúcelemből áll a tensegrity szerkezet, és a merevségi mátrix pozitív definit. Az r_1 sugárnál (4(a) ábra) a merevségi mátrixnak egy zérus sajátértéke van. E pont standard csúcskatasztrófa, az egyensúlyi útnak stabilis szimmetrikus elágazása van. A zérus sajátértékhez tartozó sajátvektor azt mutatja, hogy a „kihajlott" alak D_3 szimmetriájú.

Ha $r \in (r_1, r_2 = 0{,}4827200179)$, akkor a merevségi mátrixnak egy negatív sajátértéke van. Ha a sugár nagysága éppen r_2 (4(b) ábra), akkor az egy negatív sajátérték mellett két zérus sajátérték is lesz. Mivel az aktív elemek száma és típusa nem változik, e pont kis környezetében a kongruens körök felesleges területét leíró függvény sima, ezért az elemi katasztrófaelmélet megállapításai érvényesek. Hasonlóan az [5] cikkben tett megállapításhoz, melyet az 5 kongruens kör esetén az 5 másodlagos út esetén tettünk, megállapíthatjuk, hogy egy alkalmas koordináta-rendszerben a felesleges területet leíró függvény aktív részének 3-szelete

$$j^6 A = -\frac{1}{2}\lambda u^2 - \frac{1}{3}u^3 \cos 3\varphi \tag{20}$$

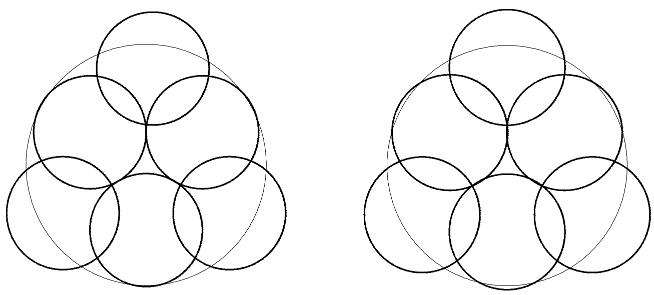
alakba transzformálható, ahol $\lambda = r - r_2$. Ezt az alakot vizsgálva megállapíthatjuk, hogy elliptikus köldök katasztrófa van, vagyis 3 másodlagos út metszi az elsődleges egyensúlyi utat, és minden másodlagos úton eggyel nő az eddigiekhez képest a negatív sajátértékek száma, vagyis két negatív sajátértéke lesz. A három másodlagos egyensúlyi út a $\varphi_i = i\pi/3$ $(i = 0,1,2)$ függőleges síkokban fekszik, és a $\lambda = (-1)^i u$ adja meg az alakjukat. A kihajlott alakok D_2 szimmetriájúak. Az emelkedő ágakon a körközéppontokra illeszkedő szimmetriatengelyen fekvő középpontok közelednek (dinnyealak), a süllyedőkön távolodnak egymástól (rögbialak).



(a) (b)

4. ábra. Elrendezések D_6 szimmetriában (a) r_1=0,4472135955 egy zérus sajátérték,
(b) r_2=0,4827200179 egy negatív és két zérus sajátérték

Ha $r \in (r_2, R_{D6})$, akkor a merevségi mátrixnak végig három negatív sajátértéke van. Természetesen közben eljutunk olyan állapotokba is, amelyeknél háromszoros fedések is létrejönnek, de a (10) egyenlet után leírt magyarázat szerint ezek figyelmen kívül hagyhatók, mert itt két kör közös részét egy harmadik kör teljesen magába foglalja, ezért az újonnan létrejövő dúcelemekben keletkező erőket a háromszögelem élereje éppen egyensúlyozza. Ha a sugár tart R_{D6}-hoz, akkor két pozitív sajátérték zérushoz tart, de a fedés elérésekor (2(a) ábra) három új dúcelem is megjelenne.



(a) (b)

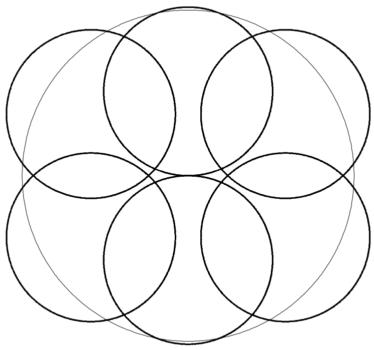
5. ábra. Elrendezések D_3 szimmetriában (a) r_3=0,4681235977 három új dúcelem,
(b) r_4=0,4810601304 három háromszögelem megjelenése

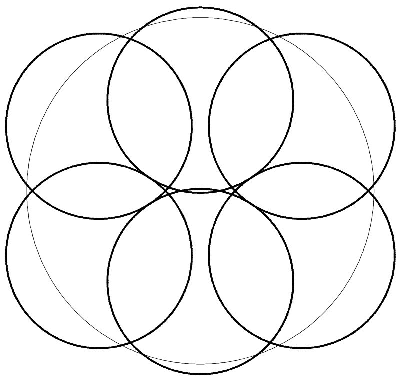
4.1.2. *A D_3 ág elemzése*

A 4.1.1. alpontban megállapítottuk, hogy az egyensúlyi út D_6 ága az r_1 pontban elágazik. Most ezt az ágat vizsgáljuk. Ha $r \in (r_1, r_3 = 0{,}4681235977)$, akkor a szerkezet 6 kötél- és 6 aktív dúcelemből áll. Az r_3 pontban a három belső kör páronként éppen összeér (5(a) ábra) és így három új dúcelem aktivizálódik. Az r_4=0,4810601304 pontban az belső körök közös részei elérik a külső köröket (5(b) ábra), így három háromszögelem is megjelenik. Ez a modell marad meg egészen az R_{D3} sugárig, amelynél az egységkört a 6 kongruens kör éppen lefedi (2(d) ábra). A merevségi mátrix az egész D_6 ágon pozitív definit. A fedési helyzethez közeledve 5 sajátérték is zérushoz tart.

4.1.3. *A D_2 (dinnye-) ág elemzése*

A 4.1.1. alpontban megállapítottuk, hogy az egyensúlyi út D_6 ágát az r_2 pontban három másodlagos egyensúlyi út ferdén metszi. Most ezeknek az utaknak az emelkedő ágát vizsgáljuk. A 6 kör D_2 szimmetriájú elrendezést alkot, konvex burkuk egy dinnyére emlékeztet. Ha $r \in (r_2, r_5 = 0{,}5089334763)$, akkor a szerkezet 6 kötél- és 6 aktív dúcelemből áll. Az r_5 pontban a szimmetriatengelyre illeszkedő két kör éppen összeér (6(a) ábra) és így egy új dúcelem aktivizálódik. Az r_6=0,5349571702 pontban 4 körérintkezés jön létre, és a D_2 szimmetriát megtartva 4-4 új aktív dúcelem és háromszögelem keletkezik (6(b) ábra), de ezek megint egymás hatását kioltják. Lényeges változás a 2(b) ábrán látható fedésig nem történik. A merevségi mátrixnak az egész dinnyeágon két negatív sajátértéke van, így az elrendezés még lokálisan sem optimális. A fedési helyzethez közeledve 5 sajátérték is zérushoz tart.


(a)

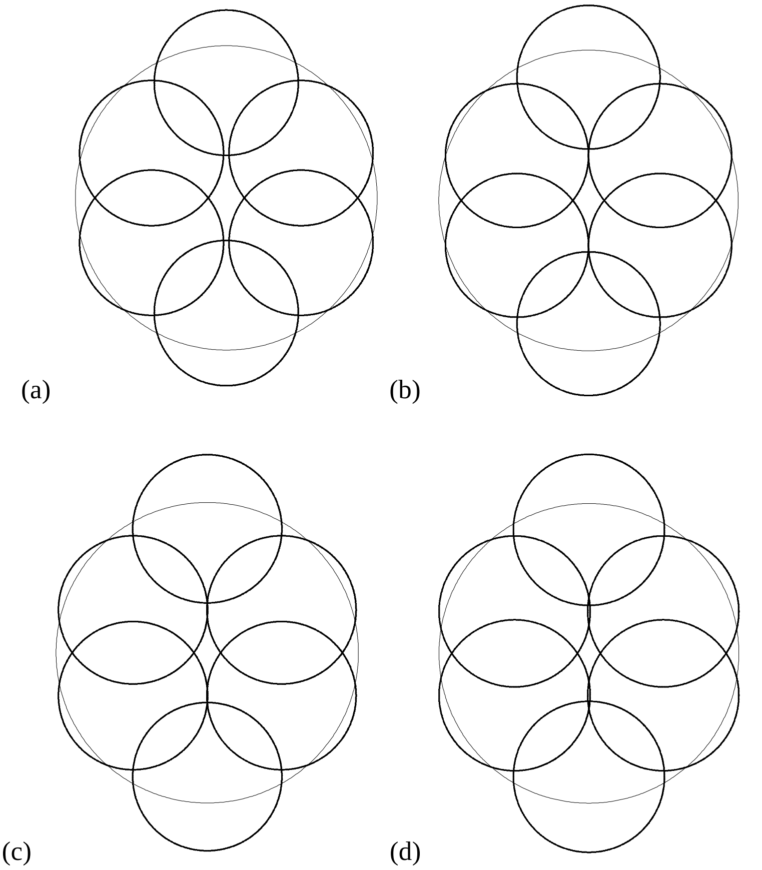

(b)

6. ábra. Elrendezések D_2 (dinnye) szimmetriában (a) r_5=0,5089334763 egy új dúcelem, (b) r_6=0,5349571702 egymást egyensúlyozó 4-4 dúc- és háromszögelem megjelenése

4.1.4. *A D_2 (rögbi-) ág elemzése*

Most a D_6 ágat az r_2 pontban metsző három másodlagos egyensúlyi útnak az eső ágát vizsgáljuk. A 6 kör itt is D_2 szimmetriájú elrendezést alkot, konvex burkuk egy rögbilabdára emlékeztet. Ha $r \in (r_2, r_7 = 0{,}4771231753)$, akkor a szerkezet 6 kötél- és 6 aktív dúcelemből áll. Az r_7 pontban (7(a) ábra) a szerkezet merevségi mátrixának eddigi két negatív sajátértéke közül az egyik zérus lesz, és egy határpontban (ránckatasztrófa) az egyensúlyi út emelkedni kezd (a szerkezet aktív topológiája nem változik). Az r_8=0,4777166212 pontban (7(b) ábra) két új dúcelem aktivizálódik. Ettől a merevségi mátrix ugrásszerűen megváltozik, minden sajátértéke pozitív lesz. (Mivel a legkisebb sajátérték az ugrásnál előjelet vált, az egyensúlyi út elágazhat. Az oldalágakat a 4.1.5. alpontban elemezzük.)

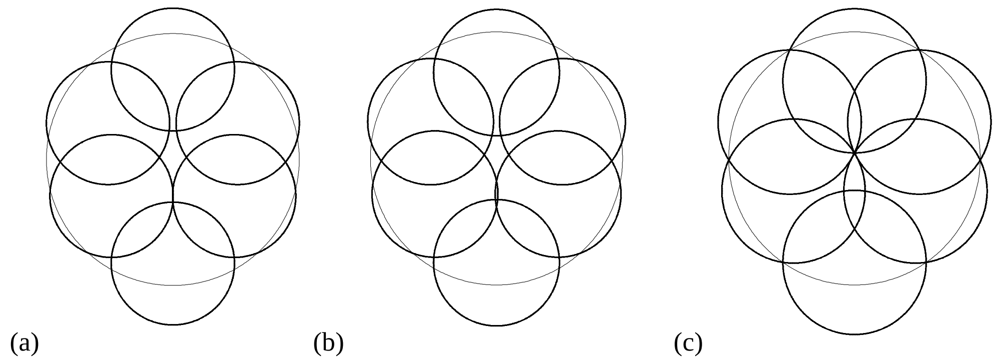
Az $r \in (r_8, r_9 = 0{,}4932700700)$ intervallumban a szerkezet 6 kötél- és 8 aktív dúcelemből áll. Az r_9 pontban (7(c) ábra) két háromszögelem aktivizálódik, de a merevségi mátrix továbbra is pozitív definit marad. Ez az állapot az r_{10}=0,5039429803 pontig (7(d) ábra) tart, melynél a merevségi mátrixnak lesz egy zérus sajátértéke. Itt sima az „energiafüggvény”, standard csúcskatasztrófa (stabilis szimmetrikus elágazás) van. Tehát az oldalágak stabilisak maradnak, és a D_2 ághoz tartozó merevségi mátrixnak a továbbiakban egy negatív sajátértéke lesz. Ezen az ágon lényeges változás a 2(c) ábrán látható fedésig (R_{D2r}=0,5651977174) nem történik.



7. ábra. Elrendezések D_2 (rögbi) szimmetriában (a) r_7=0,4771231753 határpont,
(b) r_8=0,4777166212 két új dúcelem megjelenése, (c) r_9=0,4932700700 két háromszögelem megjelenése, (d) r_{10}=0,5039429803 egy zérus sajátérték

4.1.5. ***A D_1 ág elemzése***

Az előző alpontban megállapítottuk, hogy a rögbiágon r_8 sugárnál 2-2 kör éppen összeér. Az összeérés helyzetében a dúcelem tekinthető aktívnak és passzívnak is. A dúcelem merevsége e pontban ugrik, tehát az elágazás típusa nem határozható meg a katasztrófaelmélet alapján, hiszen az csak sima függvényekkel foglalkozik. Hasonló eset fordult elő [5]-ben is, ahol egy D_1 szimmetriához tartozó ághoz két aszimmetrikus elrendezésekhez tartozó ág futott be. Itt is a két oldalágon egy-egy új dúcelem lesz csak aktív, tehát a szimmetria foka itt is csökken, a rögbiághoz D_2, az oldalágakhoz D_1 szimmetriájú elrendezések tartoznak. Az elágazási ponttól ezek az ágak emelkednek, de a 6 kötél- és 7 aktív dúcelemet tartalmazó szerkezet merevségi mátrixának továbbra is marad egy negatív sajátértéke.

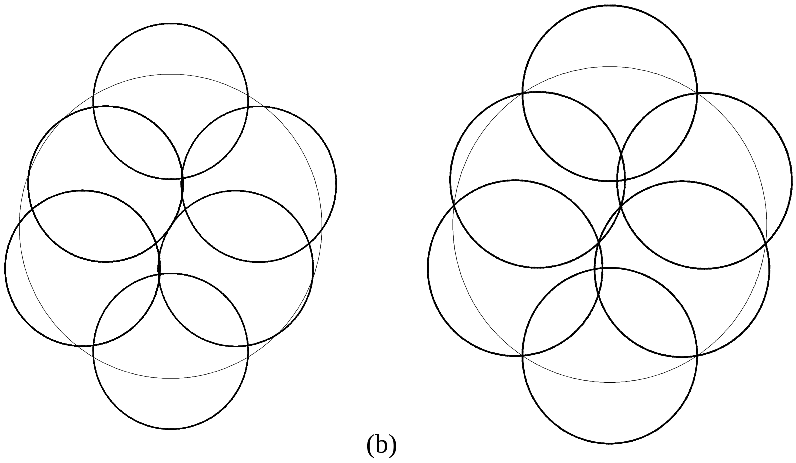


8. ábra. Elrendezések D_1 szimmetriában (a) r_{11}=0,48744564 háromszögelem megjelenése,
(b) r_{12}=0,4990334240 két új dúcelem megjelenése, (c) R_{D1}=0,5695 majdnem fedés

Az r_{11}=0,48744564 sugárnál (8(a) ábra) egy háromszögelem válik aktívvá, majd az r_{12}=0,4990334240 sugárnál (8(b) ábra) a merevségi mátrixnak lesz egy zérus sajátértéke is. Itt sima az energiafüggvény, használható a katasztrófaelmélet osztályozása: standard csúcskatasztrófa (stabilis szimmetrikus elágazás) jön létre. Az oldalágakon megmarad az egy negatív sajátérték, a D_1 ág további részében azonban már a merevségi mátrixnak két negatív sajátértéke van. Ezen az ágon az elrendezés lényegében nem változik (az új dúcelemek és háromszögelemek kiegyensúlyozzák egymást) egészen az R_{D1}=0,5695 sugárig, az egységkör fedéséig (8(c) ábra).

4.1.6. ***A C_2 ág elemzése***

A 4.1.4. alpontban megállapítottuk, hogy a rögbiágnak az r_{10} sugárnál stabilis szimmetrikus elágazási pontja van. Az oldalágakhoz tartozó elrendezéseknek C_2 szimmetriája van, a merevségi mátrix pozitív definit, azaz az elrendezések lokálisan optimálisak. Az $r \in (r_{10}, r_{13} = 0{,}5116675879)$ intervallumban a szerkezetet 6 kötél-, 8 aktív dúc- és 2 háromszögelem alkotja. Az r_{13} sugárnál (9(a) ábra) egy harmadik háromszögelem is aktivizálódik., de az ág stabilis marad egészen az R_{C2}=0,55652 sugárnál bekövetkező fedésig (9(b) ábra).

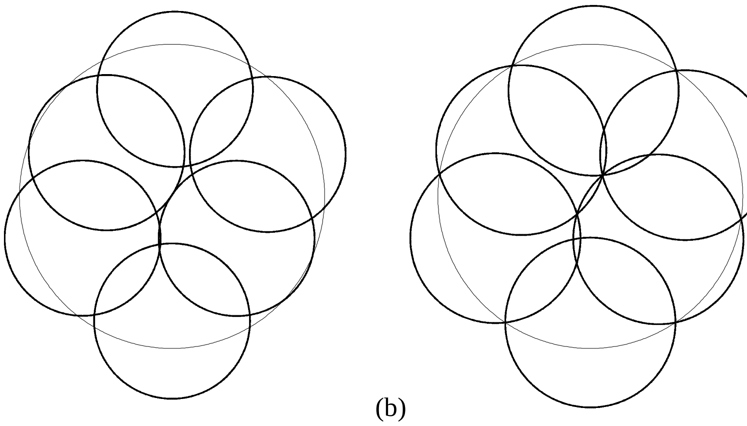


(a) (b)

9. ábra. Elrendezések C_2 szimmetriában (a) r_{13}=0,5116675879 egy új dúcelem megjelenése, (b) R_{C2}=0,55652 majdnem fedés

4.1.7. ***A C_1 ág elemzése***

A 4.1.5. alpontban megállapítottuk, hogy a D_1 ágnak az r_{12} sugárnál stabilis szimmetrikus elágazási pontja van. A kihajlásnál a szimmetria csökken, így az oldalághoz aszimmetrikus (C_1 szimmetriájú) elrendezések tartoznak. A D_1 ágnak e pontban van egy passzív negatív sajátértéke, ezért az oldalágon is lesz egy negatív sajátérték. Az r_{14}=0,5105307 sugárnál két kör összeér (10(a) ábra), és egy új dúcelem aktivizálódik. Az így kialakuló, 6 kötél-, 8 dúc- és 1 háromszögelem egészen a fedésig (10(b) ábra) megfelelő modell, mert a még megjelenő két újabb dúcelemet az új háromszögelemek egyensúlyozzák.

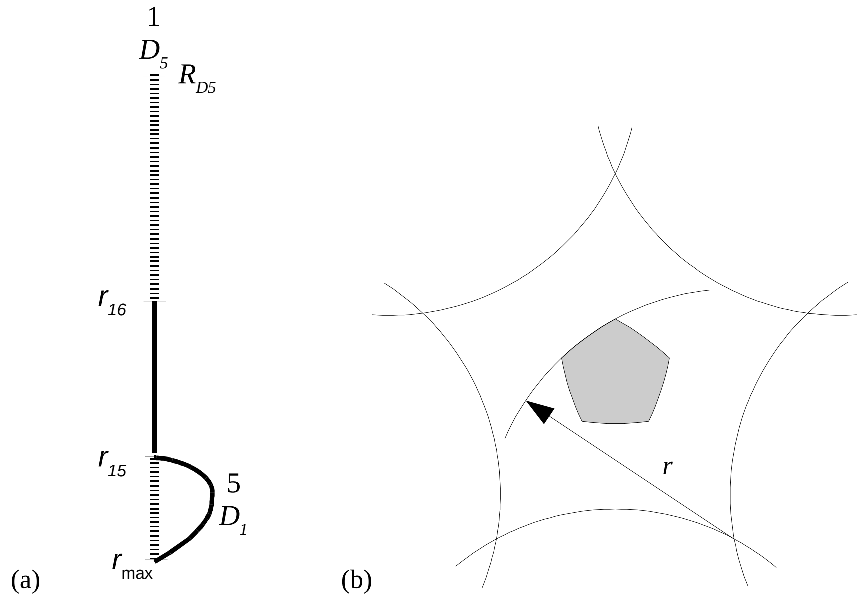


(a) (b)

10. ábra. Elrendezések C_1 szimmetriában (a) r_{14}=0,5105307 egy új dúcelem megjelenése, (b) R_{C1}=0,5581 majdnem fedés

4.2. A D_5 szimmetriájú elhelyezésből kiinduló egyensúlyi út

A D_5 szimmetriájú elrendezésből induló egyensúlyi utak egymáshoz való viszonyát a 11(a) ábrán szemléltetjük. Az ágak felett megadjuk, hogy az olyan típusú ágból hány van, és mi az elrendezések szimmetriája. A folytonos vonal a lokálisan optimális elrendezéseket jelzi, a vízszintes vonaldarabkákkal jelzett vonal azt jelenti, hogy minden pontjából egy-egy egyensúlyi felület indul.



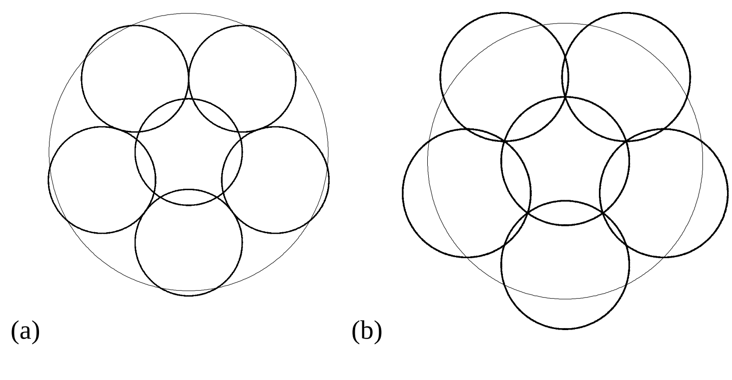
11. ábra. (a) A D_5 szimmetriájú elrendezésből kiinduló egyensúlyi utak, (b) az (r_{16}, R_{D5}) intervallumhoz tartozó rész metszeteinek alakja

4.2.1. *A D_5 ág elemzése*

Ha a kongruens körök sugarát $r_{\max}$ értékénél kicsit nagyobbra választjuk, és az 1(c) ábrán látható D_5 szimmetriájú helyzetből indulunk ki, akkor 5-5 aktív kötél- és dúceleme lesz a szerkezetnek, de a merevségi mátrixnak négy zérus sajátértéke lesz. A zérus sajátértékek azt mutatják, hogy az egyensúlyi út (ezen szakaszának) minden pontjáról elágazás van.

Ez az erősen elfajuló állapot egészen az r_{15}=0,3837971570 sugárig tart, melynél az öt külső kör összeér a szomszédjaival (12(a) ábra), és 5 új dúcelem aktivizálódik. A szerkezet merevségi mátrixa ugrásszerűen megváltozik, minden sajátértéke pozitív lesz, tehát az r_{15} sugártól az 5 kötél- és 10 aktív dúcelemből álló a szerkezet D_5 szimmetriájú stabilis elrendezésekhez tartozik.

Ez a stabilis egyensúlyi út r_{16}=0,4653411272 sugár értékig tart, melynél a külső körök közös része eléri a belső kör peremét, így öt háromszögelem aktivizálódik (12(b) ábra). A merevségi mátrix sajátértékei megint ugrásszerűen változnak és két zérus sajátérték is megjelenik. Ezután a D_5 szimmetriájú szerkezet 5 kötélből, 10 dúcból és 5 háromszögelemből áll, a merevségi mátrix egészen az R_{D5} sugár eléréséig szinguláris, vagyis ezen a szakaszon is minden pontban elágazás van. Az R_{D5} sugárhoz tartozó D_5 szimmetriájú elrendezést a 2(f) ábra mutatja.



12. ábra. Elhelyezések D_5 szimmetriában (a) r_{15}=0,3837971570 összeérnek a külső körök, (b) r_{16}=0,4653411272 öt háromszögelem megjelenése

4.2.2. *Az (r_{max}, r_{15}) szakasz elemzése*

A 2. pontban már felhívtuk a figyelmet, hogy az 1(b-d) ábrán látható elhelyezésnél a 4 külső kör megengedett helyzeteit egy négydimenziós szimplexszel lehet megadni. Ha a sugarat növeljük, akkor a 2. pontban bevezetett α csökken:

$$\alpha = \frac{2\pi}{5} - 2\arcsin\sqrt{\frac{2r^2}{1-r^2}}. \tag{21}$$

Azonban a szimplex nem minden pontjához tartozik egyensúlyi helyzet. Ugyanis ha a sugár $r_{\max}$ értékénél nagyobb, akkor az aktív dúcelemekben egyenlő nagyságú erők keletkeznek, a külső köröknél ezeket a kötélerők egyensúlyban tartják, de a középső kör csak akkor van egyensúlyban, ha a

$$\sum_{i=0}^{4}\cos\left(\frac{2i\pi}{5}+\varphi_i\right)=0, \quad \sum_{i=0}^{4}\sin\left(\frac{2i\pi}{5}+\varphi_i\right)=0 \tag{22}$$

feltételek teljesülnek. A (21) feltételek a négydimenziós szimplex egy nullmértékű részét, egy kétdimenziós felületrészt határoznak meg, melyet például a φ_1, φ_2 koordinátákkal is paraméterezhetünk. Az ($r_{\max}$, r_{15}) szakasz minden pontjához hozzárendelve a fentiekben definiált síkidomot egy fatörzshöz hasonló térrészt jelölünk ki (az r_{15} pontban a keresztmetszet egy ponttá zsugorodik), melynek pontjai egyensúlyi helyzeteket határoznak meg. A fatörzs „bele” tartozik a D_5 szimmetriájú helyzetekhez. A fatörzs „kérgénél” a (20) egyenlőtlenségek közül legalább egy egyenlőség formájában teljesül, azaz két kör összeér, vagyis egy dúcelem aktivizálódik, és ugyan zérus dúcerővel, de végtelen nagy merevségével a merevségi mátrixot megváltoztatja. A fatörzs egy keresztmetszetének minden pontjában az egységkör fedettsége megegyezik.

4.2.3. *Az (r_{16}, R_{D5}) szakasz elemzése*

Az r_{16} pontban a jelenség az r_{15} pontbeli jelenség fordítottjához hasonló. Az egyensúlyi helyzetek itt is „fatörzset” alkotnak, a bél a D_5 szimmetriájú elhelyezések egyensúlyi útja. A törzs keresztmetszetét a 10(b) ábra befestett síkidoma szemlélteti, magyarázatát (a középső kör „lötyög”) pedig a 3. pontban adtuk meg. A „kéreg” pontjai azokat a helyzeteket mutatják, amelyekben a belső kör éppen átmegy két külső kör közös tartományának az egységkör középpontjához legközelebb fekvő pontján. Ekkor egy háromszögelem területe, és így élerői is zérusok lesznek, sőt a merevsége is zérus. Ettől a szerkezet merevségi mátrixa is megváltozik, az egyik zérus sajátértéke pozitív lesz, hiszen már nem a fatörzs belsejében, tehát egy síkban minden irányban, hanem csak a kérgén mozdulhat el a középső kör középpontja. A kérgen a körök metszéspontjaiból 5 él is kialakult. Az élekhez tartozó szerkezeteknél két háromszögelem is passzív, az ezekhez tartozó elrendezések stabilisak.

Megjegyezzük, hogy az iteráció során a szingularitás miatt komoly nehézségek lépnek fel. Ha leállási feltételként a kiegyensúlyozatlan erők vektorának normájára teszünk felső korlátot, akkor előfordulhat, hogy a belső kör nem fedi le teljesen a külső 5 kör által lefedetlen területet, így az aktív háromszögelemek száma megbízhatatlan.

4.2.4. *A D_1 ág elemzése*

A 4.2.2. alpontban megállapítottuk, hogy az ($r_{\max}$, r_{15}) szakaszon milyen helyzetben van a szerkezet egyensúlyban. De mi történik akkor, ha az öt külső kört úgy fordítjuk el az origó körül, hogy a középső kör ne legyen egyensúlyban? A középső kör kimozdul, a kimozdult kör az egyik rést tágítani kezdi, a többit pedig bezárja. A lefedettség javul, és eljutunk egy lokálisan optimális helyzetbe. Ehhez a helyzethez úgy is eljuthatunk, hogy közvetlenül az 1(b) ábrán látható helyzetből indulunk ki, a középső kört kissé felfelé mozdítva, 5 aktív kötél- és 9 aktív dúcelem keletkezik, a merevségi mátrix pozitív definit lesz.

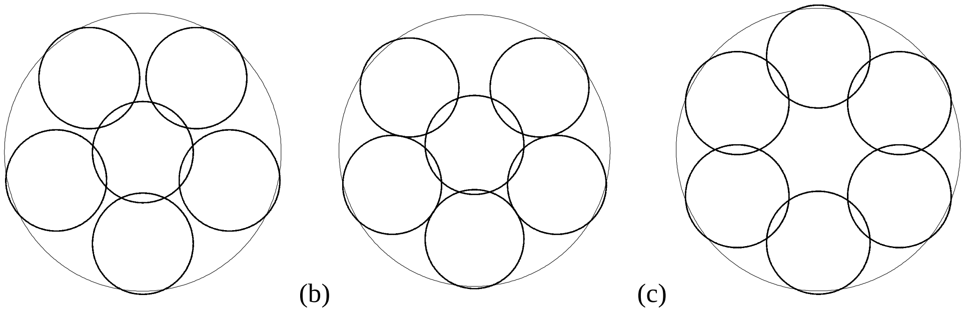
A 16. ábrán az összehasonlíthatóság kedvéért bemutatjuk az r=0,364 sugárhoz tartozó különböző szimmetriájú elrendezéseket:

(a) A 4.2.1. alpontban tárgyalt D_5 szimmetria (nem lokális optimum, lefedettség: 0,7643588212)
(b) D_1 szimmetria (lokális optimum, lefedettség: 0,7651570086)
(c) A 4.1.1. alpontban tárgyalt D_6 szimmetria (lokális optimum, lefedettség: 0,7582353854).

Megállapítható, hogy a D_1 szimmetriájú elhelyezés az optimális. Ha az $r_{\max}$ értéktől kiindulva a sugarat növeljük, akkor

- a 16(b) ábrán látható elrendezésnél a felül látható hézag fokozatosan csökken,
- a középső kör eltolódása nő, majd elkezd csökkenni, majd éppen r_{15} sugárnál zérus lesz, vagyis átmegy a D_1 szimmetriájú elrendezés D_5 szimmetriába.

Ez azt jelenti, hogy ha a belső kör középpontjának koordinátáival jellemezzük a helyzeteket, akkor a 4.2.2. alpontban tárgyalt fatörzsek is az r tengelyre illeszkedő egyenessé zsugorodnak. A most tárgyalt D_1 ágak (melyekből természetesen 5 különböző ág van, hiszen a külső körök közti kezdeti hézagot bármelyik két külső kör közé felvehetjük az indításkor) pedig egy régi habverő drótjainak (esetleg léggyökerek, melyek a törzsnél bújnak a földbe) alakját mutatják az ($r_{\max}$, r_{15}) intervallumban (11(a) ábra).

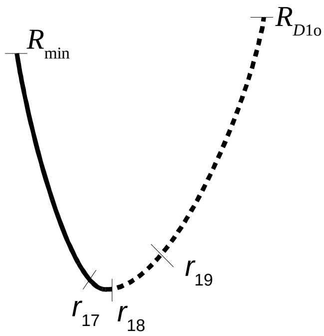


(a) (b) (c)

16. ábra. Az r=0,364 sugárhoz tartozó elrendezések (a) D_5 szimmetriában, (b) D_1 szimmetriában, (c) D_6 szimmetriában

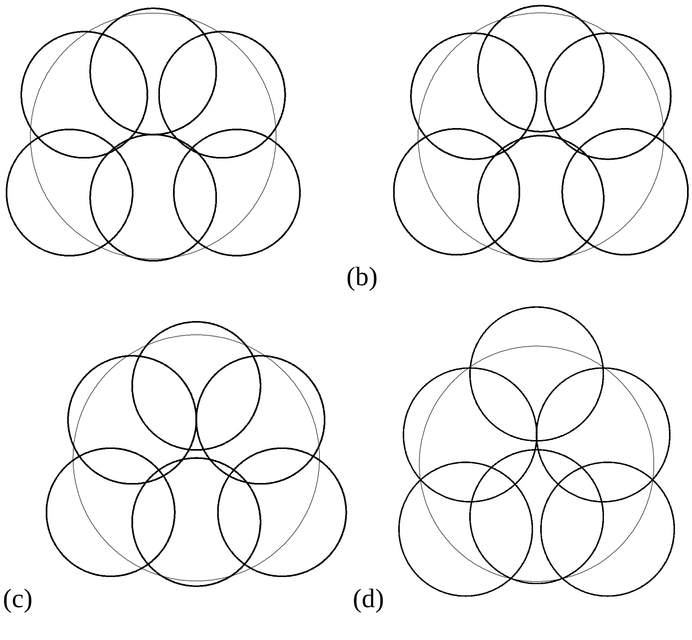
4.3. Az optimális fedésből kiinduló egyensúlyi út

A optimális fedésből induló egyensúlyi utat a 17. ábra szemlélteti. Hat ilyen út van, hiszen a hat kör közül bármelyiket tekinthetjük az origóhoz legközelebb fekvőnek. Az egyensúlyi út minden pontjához D_1 szimmetriájú elrendezés tartozik. A folytonos vonal a lokálisan optimális elrendezéseket jelzi, a szaggatott vonal pontjaihoz tartozó szerkezet merevségi mátrixának pedig egy negatív sajátértéke van.



17. ábra. Az optimális fedésből induló egyensúlyi út

Ha a 2(e) ábrán látható optimális fedésből indulunk ki, és csökkenjük a sugarat, akkor az általánosított tensegrity szerkezet 6 kötél-, 9 dúc- és 2 háromszögelemből áll. Az egyensúlyi út stabilis. Azonban r_{17}=0,513200 sugárnál a függőleges dúcelem passzív lesz (18(a) ábra). Az egyensúlyi út stabilis marad.



(a) (b)

(c) (d)

18. ábra. Elhelyezések az optimális fedésből kiinduló ágon
(a) r_{17}=0,513200 a függőleges dúcelemben zérus erő, (b) r_{18}=0,5116307327 zérus sajátérték,
(c) r_{19}=0,5204159380 egy vízszintes dúcelemben zérus erő, (d) R_{D1o} =0,5683 majdnem fedés

Az (r_{17}, r_{18}=0,5116307327) intervallumban a szerkezet 6 kötél-, 8 dúc- és 2 háromszögelemből áll. Az egyensúlyi út stabilis. Az r_{18} sugárnál azonban a legkisebb sajátérték zérus lesz (18(b) ábra), az egyensúlyi útnak (ránckatasztrófánál) határpontos stabilitásvesztése (minimumpontja) van.

A labilis ágon egy negatív sajátérték van, egészen r_{19}=0,5204159380 sugárig marad a 8 dúcelem, de ekkor a 2. és a 4. kör összeér (18(c) ábra). A 9 dúcelemmel egészen a fedésig van labilis ág, de a fedéshez közel (a fedéshez tartozó sugárnál kisebb sugárnál is) más fedési helyzetek is előfordulnak. A vizsgált ág tetejéről példaként a 18(d) ábrán bemutatjuk az R_{D1o}=0,5683 sugárhoz tartozó elrendezést, amelynél az egységkör lefedettsége 0,999595.

6. AZ EREDMÉNYEK ÖSSZEFOGLALÁSA, ÉRTÉKELÉSE

A [4] cikkben megmutattuk, hogy mechanikai eszközökkel hogyan lehet meghatározni n kongruens kör helyzetét úgy, hogy egy egységkör minél nagyobb részét takarják. Az [5] cikkben megmutattuk, hogy n=5 esetén a D_5 szimmetriájú elhelyezésből kiindulva, milyen elágazási és töréspontjai vannak az egyensúlyi útnak, az r sugár mely tartományaiban vannak egyforma, illetve különböző szimmetriájú elhelyezések.

1. táblázat. A körelhelyezések és fedések adatai: sugár, középpontok koordinátái, lefedettség

r		i	x_i	y_i	lefedettség	ábra
r_{max} (D_6)	0,3333333333	1,6	0	$\pm$ 0,6666666667	0,5555555556	1(a)
		2-5	$\pm$ 0,5773502692	$\pm$ 0,3333333333		
r_{max} (D_1)	0,3333333333	1	0	0	0,5555555556	1(b)
		2-5	$\pm$ 0,5773502692	$\pm$ 0,3333333333		
		6	0	-0,6666666667		
R_{min} (D_1)	0,5559052114	1	0	0,5617874316	1	2(e)
		2,3	$\pm$ 0,5725482556	0,3549534480		
		4,5	$\pm$ 0,6907587242	-0,4624086729		
		6	0	-0,5200412247		
R_{C2}	0,55652	1,6	0	$\pm$ 0,8308284264	0,9999999997	9(b)
		2,5	$\pm$ 0,6031594346	$\pm$ 0,2762604038		
		3,4	$\pm$ 0,4600183391	0,2827332858 $\mp$		
R_{D3}	0,5570157181	1	0	0,8305019505	1	2(d)
		2,3	$\pm$ 0,4823897622	0,2785078591		
		4,5	$\pm$ 0,7192357870	-0,4152509752		
		6	0	-0,5570157181		
R_{C1}	0,5581	1	0,0212829870	0,6939859261	0,9999996571	10(b)
		2	0,6223178661	0,2707020286		
		3	0,4460079587	-0,2826490979		
		4	-0,4534936559	0,3036330871		
		5	-0,6226966324	-0,2750275679		
		6	0	-0,8295751749		
R_{D2d}	0,5600968657	1,6	0	$\pm$ 0,5331709364	1	2(b)
		2-5	$\pm$ 0,5857864376	$\pm$ 0,3770087846		
R_{D2r}	0,5651977174	1,6	0	$\pm$ 0,8249554777	1	2(c)
		2,5	$\pm$ 0,5	$\pm$ 0,2635307567		
R_{D1o}	0,5683	1	0	0,7635149295	0,9995951761	18(d)
		2,4	$\pm$ 0,5671341896	0,2458215969		
		3,5	$\pm$ 0,6051504662	-0,5553735029		
		6	0	-0,4490244730		
R_{D1}	0,5695	1	0	0,6131495295	0,9999973954	8(c)
		2,4	$\pm$ 0,5153833862	0,2870075316		
		3,5	$\pm$ 0,4848735692	-0,2578849281		
		6	0	-0,8215268360		
R_{D6}	0,5773502692	1,6	0	$\pm$ 0,5773502691	1	2(a)
		2-5	$\pm$ 0,5	$\pm$ 0,2886751345		
R_{D5}	0,5877852523	1	0	0	1	2(f)
		2,3	$\pm$ 0,4755285518	0,6545089014		
		4,5	$\pm$ 0,7694213635	-0,2500001557		
		6	0	-0,8090171626		

Ebben az előadásban az n=6 esetet vizsgáltuk. Mivel 6 kör esetén két lényegesen különböző típusú optimális elhelyezés is van, és D_1, D_2, D_3, D_5, D_6, C_2, C_1 szimmetriájú fedések is könnyen előállíthatók, sokkal bonyolultabb szerkezetet mutatnak az egyensúlyi utak.

Az 1. táblázatban összefoglaltuk az optimális körelhelyezések és (a sugarak növekvő sorrendjében) a különböző típusú fedések legfontosabb adatait: a kongruens körök sugarait és középpontjaik koordinátáit, az egységkör lefedettségének mértékét, valamint az utolsó oszlopban megadtuk az elrendezést mutató ábra jelét. A fedéseknél a sugarat nagy betűkkel jelöltük, az indexük a szimmetria típusára utal. (A tensegrity szerkezetek állapotváltozását követve egyre kisebb lépéseket – de nagyobb számítási pontosságot – használva a fedési helyzet tetszőleges pontossággal meghatározható, de el nem érhető. Ahhoz a kötelekből álló modellt kell használni. A 2. ábrán fel nem tüntetett fedéseknél egy ahhoz közelfekvő helyzet adatait közöljük.)

A 2. táblázatban a részleges fedések hasonló adatait mutatjuk. A sugárnak akkor adtunk indexet, ha a hozzá tartozó helyzetben valami különleges dolog történik: a merevségi mátrix szinguláris lesz, a tensegrity szerkezet valamelyik eleme az aktív és passzív tartomány határán van. Olyan sugarat is kiválasztottunk, amelyiknél a különböző szimmetriájú elrendezések jól összehasonlíthatók, illetve amelyik közelében van különleges pont, de az numerikusan nehezen határozható meg.

2. táblázat. A kitüntetett és vizsgált pontok adatai: sugár, középpontok koordinátái, lefedettség

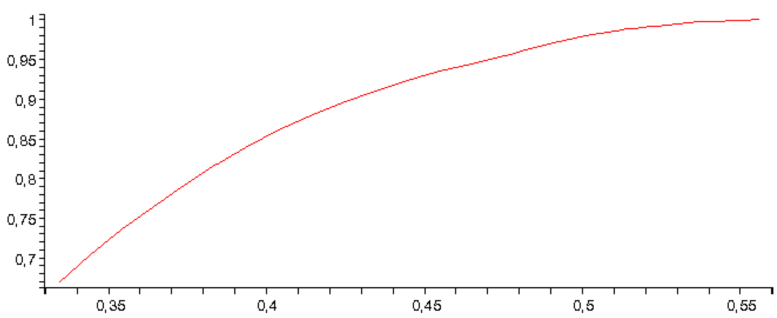
r		i	x_i	y_i	lefedettség	ábra
r_1	0,4472135955	1,6	0	$\pm$ 0,6324555320	0,9144982941	4(a)
		2-5	$\pm$ 0,5477225575	$\pm$ 0,3162277660		
r_2	0,4827200179	1,6	0	$\pm$ 0,6192662531	0,9551984579	4(b)
		2-5	$\pm$ 0,5363003069	$\pm$ 0,3096331265		
r_3	0,4681235977	1	0	0,8004294056	0,9452009602	5(a)
		2,3	$\pm$ 0,4771598040	0,2702712851		
		4,5	$\pm$ 0,6931921992	-0,4002147028		
		6	0	-0,5405425703		
r_4	0,4810603043	1	0	0,8176825088	0,9621897743	5(b)
		2,3	$\pm$ 0,4771598040	0,2754883414		
		4,5	$\pm$ 0,7081338249	-0,4088412544		
		6	0	-0,5509766826		
r_5	0,5089334763	1,6	0	$\pm$ 0,5089334763	0,9791020416	6(a)
		2-5	$\pm$ 0,5860490667	$\pm$ 0,3721826799		
r_6	0,5349571702	1,6	0	$\pm$ 0,5233712202	0,9952931802	6(b)
		2-5	$\pm$ 0,5840892239	$\pm$ 0,3730418956		
r_7	0,4771231753	1,6	0	$\pm$ 0,7568326369	0,9495539652	7(a)
		2-5	$\pm$ 0,4952596676	$\pm$ 0,2945440486		
r_8	0,4777166212	1,6	0	$\pm$ 0,8196347452	0,9502891973	7(b)
		2-5	$\pm$ 0,4777166212	0,2987485232		
r_9	0,4932700700	1,6	0	$\pm$ 0,8248914501	0,9676505985	7(c)
		2-5	$\pm$ 0,4911006728	$\pm$ 0,2854100068		
r_{10}	0,5039429803	1,6	0	$\pm$ 0,8242468715	0,9769519459	7(d)
		2-5	$\pm$ 0,4957014235	$\pm$ 0,2799112855		
r_{11}	0,48744564	1	0	0,7142214866	0,9612059828	8(a)
		2,3	$\pm$ 0,5129878451	0,2883233530		
		4,5	$\pm$ 0,4850429130	-0,2903674287		
		6	0	-0,8261517093		
r_{12}	0,4990334240	1	0	0,6785170299	0,9717499000	8(b)
		2,3	$\pm$ 0,5228790959	0,2905235730		
		4,5	$\pm$ 0,4884398843	-0,2816791405		
		6	0	-0,8241558231		
r_{13}	0,5116675879	1,6	0	$\pm$ 0,8214382601	0,9831869003	9(a)
		2,5	$\pm$ 0,5822443882	$\pm$ 0,2762544436		
		3,4	$\pm$ 0,4298786085	$\mp$ 0,2775033377		
r_{14}	0,5105307	1	0,0190552071	0,7035456085	0,9814345627	10(a)
		2	0,6265976941	0,2759739046		
		3	0,4227509152	-0,2764024202		
		4	-0,4286600184	0,2871521918		
		5	-0,5860540509	-0,2749466326		
		6	0	-0,8202119048		

2. táblázat (folytatás). A kitüntetett és vizsgált pontok adatai: sugár, középpontok koordinátái, lefedettség

r		i	x_i	y_i	lefedettség	ábra
r_{15}	0,3837971570	1	0	0	0,8178222872	12(a)
		2,3	$\pm$0,3837971570	0,5282514680		
		4,5	$\pm$0,6209968448	0,2017741062		
		6	0	-0,6529547237		
r_{16}	0,4653411272	1	0	0	0,9462006578	12(b)
		2,3	$\pm$0,4425657113	0,6091394437		
		4,5	$\pm$0,7160863632	-0,2326705636		
		6	0	-0,7529377602		
r_{17}	0,513195	1	0	0,5259359971	0,9847480884	18(a)
		2,3	$\pm$0,5603956677	0,3365815092		
		4,5	$\pm$0,6812086064	-0,4588734340		
		6	0	-0,5004540025		
r_{18}	0,5116307327	1	0	0,5469003509	0,9835433930	18(b)
		2,3	$\pm$0,5459633733	0,3230435978		
		4,5	$\pm$0,6860433004	-0,4538634867		
		6	0	-0,5088782360		
r_{19}	0,5204159380	1	0	0,5853323769	0,9889108239	18(c)
		2,3	$\pm$0,5204159380	0,3091280150		
		4,5	$\pm$0,6957416227	-0,4416518797		
		6	0	-0,5213170621		
	0,364 (D_5)	1	0	0	0,7643588212	16(a)
		2,3	$\pm$0,3871144925	0,5328173887		
		4,5	$\pm$0,6263644065	-0,2035181327		
		6	0	-0,6585985120		
	0,364 (D_1)	1	0	0,04099387715	0,7651570086	16(b)
		2,3	$\pm$0,4794149450	0,4638173612		
		4,5	$\pm$0,6073750810	-0,2525873740		
		6	0	-0,6521125625		
	0,364 (D_6)	1,6	0	$\pm$0,6585985120	0,7582353854	16(c)
		2-5	$\pm$0,5703630423	$\pm$0,3292992560		

A kapott eredmények alapján kiemeljük, hogy

- az egyensúlyi utak három – egymással össze nem függő – különböző rendszert alkotnak (a D_6 és a D_5 szimmetriájú elhelyezésből valamint az optimális fedésből kiinduló rendszer),
- a D_6 szimmetriájú elrendezéshez tartozó egyensúlyi úttal összefüggő ágaknál a ciklusszám és az ágak számának szorzata, ha szimmetriatengely is van (*D* típus), akkor 6, különben (*C* típus) 12,
- a D_5 szimmetriájú elrendezéshez tartozó egyensúlyi útnak van két olyan erősen elfajuló szakasza, amelynek minden pontjában végtelen sok irányban elágazik az egyensúlyi út, vagyis e szakaszok környezetében az egyensúlyi helyzetek háromdimenziós halmazt alkotnak.



19. ábra. Optimális fedettség a sugár függvényében

A 4. pont vizsgálataiból kiderül, hogy – szemben az n=5 esettel – minden r értékhez több lokálisan optimális elrendezés adódott. A globális optimum meghatározásához a lokális optimumokhoz tartozó lefedettségek értékeit kell összehasonlítani. (Erre mutattunk példát a 4.2.4. alpontban.) A globális optimumot

- az (r_{max}, r_{15}) intervallumban a D_1,

- az (r_{15}, 0,47449) intervallumban a D_5,
- az (0,47449, 0,54715) intervallumban a D_3,
- a (0,54715, R_{min}) intervallumban az optimális fedésből induló D_1

szimmetriájú ágakhoz tartozó elrendezések adják.

Az optimális fedettséget a 19. ábra mutatja a sugár függvényében.

Köszönetnyilvánítás

A téma felvetését, az irodalmi adatokat és az állandó konzultációs lehetőséget köszönöm Tarnai Tibornak. Hincz Krisztián a dinamikus ellazítás módszerével végzett ellenőrző számításokat, és az ábrák készítésében is sokat segített. A kutatást az OTKA K 81146 pályázat támogatta.

HIVATKOZÁSOK

1. Zahn, Z. T.: Black box maximization of circular coverage. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B* 66 (1962), 181-216.
2. Csikós, B.: On the volume of the union of balls. *Discrete Comput. Geom.* 20(4) (1998), 449-461.
3. Connelly, R.: Maximizing the area of unions and intersections of discs. Lecture at the *Discrete and Convex Geometry Workshop*, Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budapest, July 4-6. 2008.
4. Gáspár Zs., Tarnai T., Hincz K.: Partial covering a circle by equal circles. Part I: The mechanical models. Manuscript, 2011.
5. Gáspár Zs., Tarnai T., Hincz K.: Partial covering a circle by equal circles. Part II: The case of 5 circles. Manuscript, 2011.
6. Bezdek K.: *Optimal covering of circles* (in Hungarian). Thesis (Budapest, 1979).